IL CALCOLO DELLE MOLLE AD ELICA CILINDRICA IN FILO
A SEZIONE RETTANGOLARE O QUADRA

Introduzione

Da più parti è stato chiesto di affrontare il calcolo delle molle di compressione realizzate con fili a sezione rettangolare o quadrata. Purtroppo tutt'oggi manca una norma EN che fornisca le formule per il dimensionamento di tali molle.

La vecchia norma UNI 7900 – 2 è stata ritirata l'1/8/2003 senza sostituzione.

Contrariamente a quanto avvenuto in Italia, la norma DIN 2090 – Zylindrische Schraubendruckfedern aus Flachstahl del gennaio 1971 è ancora in vigore.

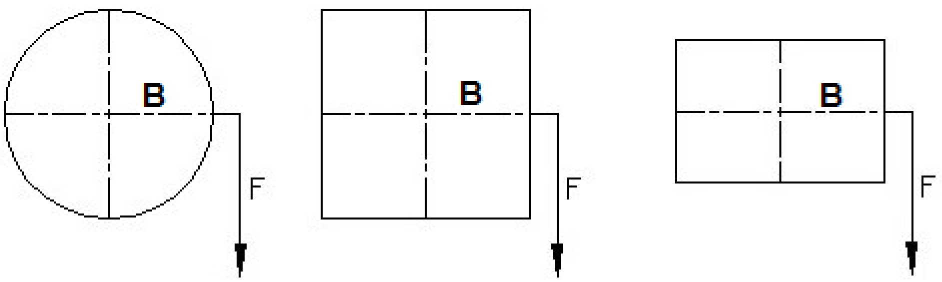
Le molle costruite con barra a sezione quadrata o rettangolare vengono utilizzate quando è necessario accumulare una notevole quantità di energia in uno spazio limitato.

Un problema che spesso sorge durante la progettazione è trovare una molla con caratteristiche di carico e freccia assegnati con spazi disponibili limitati.

Prima di addentrarci entrare nel calcolo della molla è importante ricordare cosa avviene quando si sottopone una barra a sezione circolare o rettangolare a torsione.

La torsione semplice

Schematizziamo la situazione ipotizzando di applicare una forza F distante B dal centro della sezione



Barra a sezione circolare

Il momento torcente M_t sarà dato dal prodotto $M_t = F * B$

La sollecitazione massima nella sezione circolare di raggio R è data da $\tau_{max} = \frac{M_t * R}{J_p}$ dove J_p è il momento d'inerzia polare che vale $J_p = \frac{\pi * R^4}{2} = \frac{\pi * D^4}{32}$

Sostituendo l'espressione di J_p otteniamo

$$\tau_{max} = \frac{M_t * R}{J_p} = \frac{M_t * R}{\frac{\pi * R^4}{2}} = \frac{2 * M_t}{\pi * R^3} = \frac{16 * M_t}{\pi * D^3}$$

La Scienza delle Costruzione ci dice che τ_{max} non deve superare un valore t chiamato *"carico di sicurezza a tensione tangenziale"*.

Per i metalli duttili si può ritenere che t sia legato al *"carico di sicurezza* k *a tensione normale"* dalla relazione $t = \frac{m*k}{(m+1)}$ dove $\frac{1}{m}$ è il Coefficiente di Poisson ν .

Quindi $\tau_{max} \le t = \frac{m}{m+1} * k$

Per l'acciaio si assume generalmente $\nu = 0{,}3$ ovvero $m = \frac{10}{3} = 3{,}33$ e quindi $\tau_{max} \le t = \frac{10}{13} * k = 0{,}77 * k$

NOTA: *La norma UNI EN 13906-1 dice che, per molle in filo tondo, la sollecitazione torsionale ammissibile non corretta a spire bloccate* τ_{czul} *deve essere* $\tau_{czul} = 0{,}56 \bullet Rm$ *dove* Rm *è il valore minimo della resistenza a trazione.*

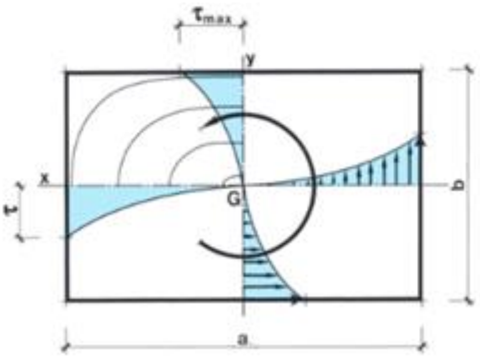
Angolo di torsione per barra a sezione circolare

Se indichiamo con θ l'angolo unitario di torsione fra due sezioni distanti uno, con alcune considerazioni che qui tralasciamo, si ricava $\theta = \frac{M_t}{G * J_p}$ dove G è il *"modulo di elasticità tangenziale"* che ricordiamo è legato ad E *"modulo di Joung"* o *" modulo di elasticità"* dalla relazione $G = \frac{m}{2*(m+1)} * E$

L'angolo totale Θ di torsione fra due sezioni distanti l vale quindi $\Theta = \theta * l = \frac{M_t * l}{G * J_p}$

Sezione rettangolare

Le linee di tensione hanno l'andamento rappresentato parzialmente nella figura che segue.



La sollecitazione τ è massima nei punti di mezzo dei lati più lunghi.

Indicando con a il lato maggiore e con b il lato minore la τ_{max} e l'angolo unitario di torsione θ sono dati da

$$\tau_{max} = \alpha * \frac{M_t}{a * b^2} \qquad \theta = \beta * \frac{M_t}{G * a * b^3} \qquad \tau_{max} = \frac{\alpha}{\beta} * G * \theta * b$$

I coefficienti α e β dipendono dal rapporto $n = \frac{a}{b}$ e hanno i seguenti valori calcolati da Saint-Venant:

$n = a/b$	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,75	1,8
α	4,804	4,67	4,57	4,52	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,18	4,16
β	7,114	6,49	6,02	5,82	5,65	5,35	5,11	4,91	4,74	4,67	4,60

$n = a/b$	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10	20	∞
α	4,07	3,97	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00
β	4,37	4,16	4,01	3,80	3,56	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00

In prima approssimazione i coefficienti α e β si possono calcolare con le seguenti formule approssimate:

$$\alpha = 3 + \frac{1{,}8}{n} \qquad \beta = \frac{3 \bullet n}{n - 0{,}63}$$

Per $n \geq 4$ in pratica si ha $\tau_{max} = G * \theta * b$

Nei punti di mezzo dei lati minori si ha una tensione τ_1 che è uguale a τ_{max} per $n = 1$ (quadrato) e diminuisce fino a $0{,}7425 * \tau_{max}$ per $n \geq 4$

Nel caso di sezione quadrata, ovvero con $n = 1$ si ha

$$\tau_{max} = 4{,}804 \bullet \frac{M_t}{a^3} \qquad \theta = 7{,}114 \bullet \frac{M_t}{G \bullet a^4}$$

Nel caso di un rettangolo molto allungato ovvero con $a >> b$ si ha con buona approssimazione $\alpha \cong \beta$ per cui

$$\tau_{max} = 3 * \frac{M_t}{a * b^2} \qquad \theta = 3 * \frac{M_t}{G * a * b^3} \qquad \tau_{max} = G * \theta * b$$

Esempio di applicazione

Vogliamo determinare la massima tensione torsionale in una sezione rettangolare di lati $a = 150 \quad mm$ e $b = 300 \quad mm$ cui viene applicato un momento torcente $M_t = 0{,}8 \bullet 10^6 \quad Nmm$

Si ha $\tau_{max} = \dfrac{\alpha \bullet M_t}{a \bullet b^2}$

Calcoliamo il rapporto $n = \dfrac{a}{b} = \dfrac{300}{150} = 2$ a cui corrisponde nella Tab. 1 $\alpha = 4{,}07$

Per cui

$$\tau_{max} = \frac{\alpha \bullet M_t}{a \bullet b^2} = \frac{4{,}07 \bullet 0{,}8 \bullet 10^6 M_t}{330 \bullet 150^2} = 0{,}48 \, N/mm^2$$

CALCOLO DELLE MOLLE DI COMPRESSIONE AD ELICA CILINDRICA

Formule per il calcolo della freccia s ***in funzione del carico*** F

La norma UNI EN 13906-1 fornisce per il calcolo della freccia delle molle in filo a sezione circolare la seguente formula

$$s = \frac{8 \bullet D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet d^4}$$

Per le molle in filo a sezione rettangolare la norma UNI 7900 – 2 forniva per la freccia la seguente formula

$$f = \frac{\varepsilon}{G} \bullet \frac{D^3}{l^2 \bullet h^2} \bullet i \bullet F$$

dove l e h sono le dimensioni della sezione del materiale , i corrisponde al numero di spire attive n e ε è detto "Fattore di correzione della freccia" e dipende dal rapporto di forma $m = \frac{l}{h}$.

Con scrittura analoga alla UNI EN 13906-1 la riscriveremmo così:

$$s = \varepsilon \bullet \frac{D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet l^2 \bullet h^2}.$$

Come si può notare questa formula è del tutto simile a quella delle molle costruite con filo a sezione circolare.

Il valore di ε in funzione del rapporto $m = \frac{l}{h}$ si ricava dalla seguente tabella

l/h	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
ε	13,48	7,87	6,25	5,71	5,59	5,67	5,88	6,17	6,50

l/h	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6
ε	6,87	7,26	7,67	8,09	8,51	8,95	9,39	9,83	10,28

l/h	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
ε	10,73	11,19	11,63	12,11	12,50	12,92	13,48

La norma UNI 7900 – 2 e la norma DIN 2090 riportano la stessa formula che riscritta con la simbologia corrente è ancora

$$s = \varepsilon \bullet \frac{D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet l^2 \bullet h^2}$$

dove ε è praticamente lo stesso della tabella qui sopra anche se la DIN la fornisce in questa forma

l/h o h/l	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
ε	5,59	5,61	5,67	5,77	5,88	6,02	6,17	6,33	6,50	6,68	6,87

l/h o h/l	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,5	5
ε	7,26	7,67	8,09	8,51	8,95	9,39	9,83	10,28	10,73	11,19	12,33	13,48

Per le molle con un rapporto $\frac{D}{a}$ o $\frac{D}{h}$ alto per il cedimento Whal fornisce la seguente formula sufficientemente precisa quando il valore del rapporto è maggiore di 8

$$s = \frac{1}{k_2} \bullet \frac{D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet l \bullet h^3}$$

k_2 dipende dal rapporto $\frac{l}{h}$ e si ricava dalla seguente tabella

l/h	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
k_2	0,180	0,212	0,250	0,292	0,317	0,335	0,371	0,398	0,424

Nel testo *"Il progetto e il calcolo delle molle"* dell'Ing. Giorgio Deangeli edito da Hoepli nel 1953 si trova, riscritta con i simboli usati fin qui, la seguente formula

$$s = \frac{\pi}{4} \bullet \frac{C_2}{C_1} \bullet \frac{D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet l \bullet h^3}$$

In cui i coefficienti C_1 e C_2 sono funzione del rapporto l/h e sono indicati nella seguente tabella

l/h	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5
C_1	0,208	0,219	0,227	0,234	0,240	0,246	0,257
C_2	1,49	1,32	1,22	1,15	1,10	1,07	1,03

l/h	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0	12,0
C_1	0,267	0,282	0,292	0,299	0,307	0,313	0,314
C_2	1,02	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Formule per il calcolo del carico F in funzione della freccia s

Per il carico della molla costruita con filo a sezione circolare la norma UNI EN 13906-1 utilizza la formula

$$F = \frac{G \bullet d^4 \bullet s}{8 \bullet D^3 \bullet n}$$

Utilizzando le formule della norma UNI 7900 – 2 per le molle in filo a sezione rettangolare e la norma DIN 2090 otterremmo

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \bullet \frac{G \bullet l^2 \bullet h^2 \bullet s}{D^3 \bullet n}$$

Formule per il calcolo della sollecitazione torsionale corretta τ_k in funzione del carico F

La sollecitazione torsionale corretta τ_k per le molle infilo tondo è data dalla norma UNI EN 13906-1 da

$$\tau_k = k \bullet \frac{8 \bullet D}{\pi \bullet d^3} \bullet F$$

dove $k = \frac{4 \bullet w - 1}{4 \bullet w - 4} + \frac{0{,}615}{w}$ rappresenta il fattore di correzione della sollecitazione secondo Wahl.

Per le molle in filo quadro Whal fornisce la seguente formula

$$\tau_k = K \bullet \frac{2{,}4 \bullet D}{a^3} \bullet F$$

dove a rappresenta il lato della sezione quadrata e il coefficiente di correzione della sollecitazione è dato da $K = 1 + \frac{1}{w} + \frac{0{,}56}{w^2} + \frac{0{,}5}{w^3}$ dove w rappresenta il rapporto di avvolgimento $w = \frac{D}{a}$

La vecchia norma UNI 7900 parte 2 fornisce per le molle in filo rettangolare la seguente formula

$$\tau_k = \beta \bullet \frac{D}{\sqrt{l^3 \bullet h^3}} \bullet F$$

Il valore del coefficiente β non è ricavabile né da una formula né da una tabella ma bisognava utilizzare questo grafico non troppo agevole

2.2.2. Fattore di correzione β della tensione di torsione

Il fattore di correzione β della tensione di torsione è funzione del rapporto di forma della sezione $m = l/h$ e del rapporto di avvolgimento c. Nella figura 1 sono riportati in diagramma i valori da assegnare al fattore di correzione β in funzione del rapporto di forma m della sezione per differenti valori del rapporto di avvolgimento c compresi tra 3 e ∞, nel caso di sezione rettangolare del filo o della barra.

La validità del diagramma è limitata al caso delle molle aventi più di due spire attive.

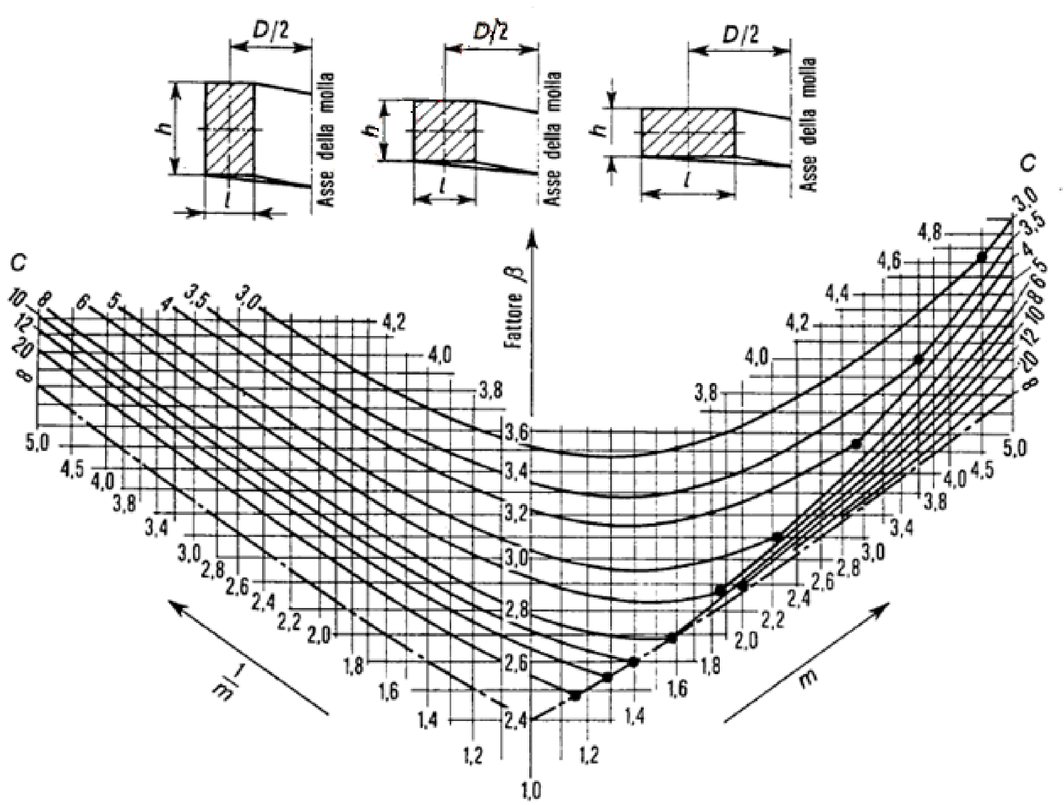


Fig. 1 – Valori del fattore di correzione β in funzione del rapporto di forma m della sezione e del rapporto di avvolgimento c

Questo grafico è lo stesso che i trova nel testo *"Mechanical Springs"* di A.M. Wahl per le molle costruite con filo a sezione rettangolare così come vi si trova sempre la stessa formula della UNI 7900 -2.

La norma DIN 2090 fornisce la stessa formula e lo stesso grafico solo che indica il fattore di correzione anziché con β con la lettera greca Ψ

Nel testo *"Il progetto e il calcolo delle molle"* dell'Ing. Giorgio Deangeli edito da Hoepli nel 1953 si trova, riscritta con i simboli usati fin qui, la seguente formula

$$\tau = \frac{1}{C_1} \bullet \frac{D \bullet F}{2 \bullet l \bullet h^2}$$

Dove C_1 è il coefficiente riportato in funzione del rapporto l/h nella tabella precedente.

CONFRONTO FRA MOLLA IN FILO TONDO E MOLLA IN FILO A SEZIONE QUADRATA

Prendiamo in considerazione due molle che abbiano lo stesso ingombro esterno, una a sezione tonda e una a sezione quadrata.

Assumiamo per entrambe

De = 40 mm

Di = 30 mm

n = 5

G = 81500 N/mm^2

Carico F = 300 N

Avremo quindi per la molla in filo tondo d = 5 e per la molla in filo quadro a = 5

Utilizzando le formule sopra indicate troviamo

<table>
<tr><td>Molla in filo tondo</td><td>Molla in filo quadro</td></tr>
<tr><td>
$s = \frac{8 \bullet D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet d^4} = \frac{8 \bullet 35^3 \bullet 5 \bullet 300}{81500 \bullet 5^4} = 10{,}1 mm$
$\tau_k = k \bullet \frac{8 \bullet D}{\pi \bullet d^3} \bullet F$
$k = \frac{4 \bullet w - 1}{4 \bullet w - 4} + \frac{0{,}615}{w}$
$w = \frac{D}{d} = 7$
$k = \frac{4 \bullet 7 - 1}{4 \bullet 7 - 4} + \frac{0{,}615}{7} = 1{,}21286$
$\tau_k = 1{,}21286 \bullet \frac{8 \bullet 35}{\pi \bullet 5^3} \bullet 300 = 259 N / mm^2$
</td><td>
$l/h = 1 \quad \varepsilon = 5{,}59$
$s = \varepsilon \bullet \frac{D^3 \bullet n \bullet F}{G \bullet l^2 \bullet h^2} = 5{,}59 \bullet \frac{35^3 \bullet 5 \bullet 300}{81500 \bullet 5^2 \bullet 5^2} = 6{,}3 mm$
$w = \frac{D}{a} = 7$
$K = 1 + \frac{1}{w} + \frac{0{,}56}{w^2} + \frac{0{,}5}{w^3} = 1 + \frac{1}{7} + \frac{0{,}56}{7^2} + \frac{0{,}5}{7^3} = 1{,}156$
$\tau_k = K \bullet \frac{2{,}4 \bullet D}{a^3} \bullet F$
$\tau_k = 1{,}156 \bullet \frac{2{,}4 \bullet 35}{5^3} \bullet 300 = 233 N / mm^2$
Oppure, utilizzando la formula UNI 7900 parte 2 o DIN 2090
$\tau_k = \beta \bullet \frac{D}{\sqrt{l^3 \bullet h^3}} \bullet F$
Dal grafico ricaviamo
$\beta = 2{,}85$
Per cui
$\tau_k = 2{,}85 \bullet \frac{35}{\sqrt{5^3 \bullet 5^3}} \bullet 300 = 239{,}4 N / mm^2$
</td></tr>
</table>

Come si nota la molla in filo quadro, a parità di ingombri, ha una freccia minore (6,3 mm contro i 10,1 della molla in filo tondo) e una sollecitazione corretta leggermente inferiore (233÷239,4 N/mm^2 contro i 259 N/mm^2) dovuti, ovviamente ad una freccia inferiore.

Ing. Angelo Dovelli – Segretario ANCCEM